1998年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______.

【答】 $-\dfrac{1}{4}$.

【详解 1】 用四则运算将分子化简，再用等价无穷小因子代换，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2-4}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{4x^2} \qquad \text{因}\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

【详解 2】 采用洛必达法则，

$$\text{原式}\xrightarrow{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$$\xrightarrow{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}.$$

注： $\sqrt{1-x^2}\to 1\left(x\to 0\right)$可求出

【详解 3】 采用$\left(1+u\right)^{\lambda}$的马克劳林展开式，此时余项用皮亚诺余项较简单.当$u\to 0$时

$$\left(1+u\right)^{\lambda}=1+\lambda u+\frac{\lambda\left(\lambda-1\right)}{2!}u^2+o\left(u^2\right),$$

所以$x\to 0$时

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o\left(x^2\right),$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o\left(x^2\right),$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}$$

（2）设 $z=\frac{1}{x}f\left(xy\right)+y\varphi\left(x+y\right), f,\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

【答】 $yf''\left(xy\right)+\varphi'\left(x+y\right)+y\varphi''\left(x+y\right)$.

【详解】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f\left(xy\right)+\frac{y}{x}f'\left(xy\right)+y\varphi'\left(x+y\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}f'\left(xy\right)+\frac{1}{x}f'\left(xy\right)+yf''\left(xy\right)+\varphi'\left(x+y\right)+y\varphi''\left(x+y\right)$$

$$=yf''\left(xy\right)+\varphi'\left(x+y\right)+y\varphi''\left(x+y\right)$$

（3）设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,$ 其周长记为 $a,$ 则 $\oint_l\left(2xy+3x^2+4y^2\right)ds=$_____.

【答】 $12a$.

【详解】 以 l 为方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,$ 即 $3x^2+4y^2=12$ 代入，得

$$\oint_l\left(2xy+3x^2+4y^2\right)ds=\oint_l\left(2xy+12\right)ds=2\oint_l xyds+12a=12a,$$

其中第一个积分，由于 l 关于 x 轴对称，而 xy 关于 y 为奇函数，于是 $\oint_l xyds=0$.

（4）设 A 是 n 阶矩阵，$\left|A\right|\neq 0, A^*$ 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.若 A 有特征值 $\lambda,$ 则 $\left(A^*\right)^2+E$ 必有特征值_____.

【答】 $\left(\frac{\left|A\right|}{\lambda}\right)^2+1$.

【详解】 设 $Ax=\lambda x\left(x\neq 0\right),$ 则

$$A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x\Rightarrow\left|A\right|A^{-1}x=\frac{\left|A\right|}{\lambda}x,\left(x\neq 0\right)$$

即 $A^{*}x=\frac{|A|}{\lambda}x$, 从而 $\left(A^{*}\right)^{2}x=\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^{2}x$,

$$\left[\left(A^{*}\right)^{2}+E\right]x=\left[\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^{2}+1\right]x, x\neq 0,$$

可见 $\left(A^{*}\right)^{2}+E$ 必有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^{2}+1$

（5）设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^{2}$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为_____.

【答】 $\frac{1}{4}$.

【详解】 区域 D 的面积为

$$S_{D}=\int_{1}^{e^{2}}dx\int_{1}^{\frac{1}{x}}dy=\int_{1}^{e^{2}}\frac{1}{x}dx=2.$$

于是 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},(x,y)\in D\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

其关于 x 的边缘概率密度为

$$f_{X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X}(x)dy=\begin{cases}\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x},1\leq x\leq e^{2}\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$$

故 $f_{X}(2)=\frac{1}{4}$.

二、选择题

（1）设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}tf\left(x^{2}-t^{2}\right)dt$ 等于

（A） $xf\left(x^{2}\right)$ (B) $-xf\left(x^{2}\right)$ （C） $2xf\left(x^{2}\right)$ （D） $-2xf\left(x^{2}\right)$

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】 作变量代换 $u=x^{2}-t^{2}$，则

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0\left[-\frac{1}{2}f\left(u\right)\right]du=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}f\left(u\right)du$$
$$=\frac{1}{2}f\left(x^2\right)\cdot 2x$$
$$=xf\left(x^2\right)$$

（2）函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是

（A）3.　　（B）2.　　（C）1.　　（D）0.

【 】

【答】　应选（B）.

【详解】　因为

$$f\left(x\right)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|=\left(x-2\right)\left(x+1\right)\left|x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right|,$$

可见 $f\left(x\right)$ 在 $x=0,1$ 处不可导，而在 $x=-1$ 处是可导的，

故　$f\left(x\right)$ 的不可导点的个数为 2.

（3）已知函数 $y=y\left(x\right)$ 在任意点 x 处的增量 $\vartriangle y=\frac{y\vartriangle x}{1+x^2}+\alpha,$ 且当 $\vartriangle x\to 0$ 时，α 是 $\vartriangle x$ 的高阶无穷小，$y\left(0\right)=\pi$，则 $y\left(1\right)$ 等于

（A）2π.　　（B）π.　　（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$.　　（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

【 】

【答】　应选（D）.

【详解】　由 $\vartriangle y=\frac{y\vartriangle x}{1+x^2}+\alpha,$，有

$$\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\vartriangle x}.$$

令 $\vartriangle x\to 0$，得　$y'=\frac{y}{1+x^2}$，

解此微分方程并利用初始条件由 $y\left(0\right)=\pi,$ 得 $y=\pi e^{\arctan x}$

故　$$y\left(1\right)=\pi e^{\arctan x}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}.$$

（4）设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

（A）相交于一点.　　（B）重合.

（C）平行但不重合.　　（C）异面.

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】 设矩阵$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$是满秩的，所以通过行初等变换后得矩阵

$\begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$仍是满秩的，于是两直线的方向向量

$$S_1=\{a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2\}$$
$$S_2=\{a_2-a_3,a_2-a_3,c_2-c_3\}$$

线性无关，可见此两直线既不平行，又不重合.又(a_1,b_1,c_1)、(a_3,b_3,c_3)分别为两直线上的点，其连线向量为:$S_1=\{a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1\}$,满足$S_3=S_1+S_2$.可见三向量$S_1,S_2,S_3$共面，因此$S_1,S_2$必相交，即两直线肯定相交.

（5）设A、B是两个随机事件，且$0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$,则必有

（A） $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$ (B) $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$. (D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

【 】

【答】 应选（C）.

【详解】 由条件概率公式及条件$P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$，知

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(A)}$$

于是有

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(\overline{A}B)=P(A)[P(B)-P(AB)]$$

可见 $P(AB)=P(A)P(B)$

故选（C）.

三、求直线$l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\pi:x-y+2z-1=0$上投影直线$l_0$的方程，并求$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程.

【详解 1】

过直线l作一垂直于π的平面π_1，其法向量既垂直于l的方向向量$s=\{1,1,-1\}$，又垂直于π

的法向量$n=\{1,-1,2\}$，可用向量积求得

$$n_1=s\times n\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=i-3j-2k.$$

又$(1,0,1)$为直线l上的点，所以该点也在平面π_1上，由点法式得π_1的方程为

$$(x-1)-3y-2(z-1)=0, \text{即} \quad x-3y-2z+1=0.$$

从而l_0的方程为

$$l_0:\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$$

将l_0写成参数y的方程：$\begin{cases} x=2y \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

于是直线绕y轴旋转所得旋转曲面方程为：

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$$

即 $$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

【详解 2】

用平面束方法，直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$的方程可写为 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

于是过l的平面方程可写成

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0,$$

即 $$x+(\lambda-1)y+\lambda z-\lambda-1=0.$$

在其中求出平面π_1，使它与π垂直，得

$$1-(\lambda-1)=2-\lambda=0,$$

解得$\lambda=-2,$于是π_1的方程为

$$(x-1)-3y-2(z-1)=0, \quad \text{即} \quad x-3y-2z+1=0$$

以下同解法一.

四、确定常数λ,使在右半平面$x>0$上的向量$A\left(x,y\right)=2xy\left(x^4+y^2\right)^{\lambda}i-x^2\left(x^4+y^2\right)^{\lambda}j$为某二元函数$u\left(x,y\right)$的梯度，并求$u\left(x,y\right)$.

【详解】 令$P\left(x,y\right)=2xy\left(x^4+y^2\right)^{\lambda},Q\left(x,y\right)=-x^2\left(x^4+y^2\right)^{\lambda}$,

由题设，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

即 $$4x\left(x^4+y^2\right)^{\lambda}\left(\lambda+1\right)=0.$$

可见，当且仅当$\lambda=-1$时，所给向量场时梯度场，在$x>0$在半平面内任取一点，比如点$\left(1,0\right)$作为积分路径的起点，则根据积分与路径无关，有

$$u\left(x,y\right)=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0}dx-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}+C$$
$$=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.$$

其中C为任意常数.

五、从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度y（从海平面算起）与下沉速度v之间的函数关系.设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为m,体积为B,海水比重为ρ,仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为$k\left(k>0\right)$.试建立y与v所满足的微分方程，并求出函数关系式$y=y\left(v\right)$.

【详解】 取沉放点为原点O,Oy轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv,$$

这是可降阶的二阶微分方程，其中$v=\dfrac{dy}{dt}$.

令$\dfrac{dy}{dt}=v$,则 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dv}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}$,于是原方程可化为

$$mv\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv,$$

分离变量得

$$dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv,$$

积分得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m\left(mg-B\rho\right)}{k^2}\ln\left(mg-B\rho-kv\right)+C$$

再根据初始条件$v\big|_{y=0}=0$, 得

$$C=\frac{m\left(mg-B\rho\right)}{k^2}\ln\left(mg-B\rho-kv\right),$$

故所求函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m\left(mg-B\rho\right)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}.$$

六、计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, 其中$\sum$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数.

【详解 1】

添加一平面区域后用高斯公式进行计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy.$$

补一块有向平面$\sum_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$，其侧与$z$轴负向一致，于是有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a}\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy-\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma_1}axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy\\&=\frac{1}{a}\left(-\iiint\limits_{\Omega}\left(3a+2z\right)dV+\iint\limits_{D}a^2dxdy\right)\\&=\frac{1}{a}\left(-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}zdV+\pi a^4\right)\\&=\frac{1}{a}\left(-2\pi a^4-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 zdz\right)\\&=-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

【详解 2】

直接分块计算：

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}axdydz+\left(z+a\right)^2dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}xdydz+\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}\left(z+a\right)^2dxdy=I_1+I_2.$$

其中

$$I_1=\iint_{\Sigma}xdydz=-2\iint_{Dyz}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydz,$$

D_{yz} 为 yOz 平面上的半圆： $y^2+z^2\le a^2, z\le 0.$ 利用极坐标，得

$$I_1=-2\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}rdr=-\frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}\left(z+a\right)^2dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}\left(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^2dxdy,$$

D_{xy} 为 xOy 平面上的圆域： $x^2+y^2\le a$ 。利用极坐标，得

$$I_2=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{6}a^3,$$

故 $$I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

七、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right].$

【详解】 由于

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}, i=1,2,3,\cdots,n.$$

于是 $$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=1\cdot\int_0^1\sin\pi x=\frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x=\frac{2}{\pi}.$$

故根据夹逼定理知，原式$=\frac{2}{\pi}$.

八、设正项数列$\left\{a_n\right\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？并说明理由.

【详解 1】

由正项数列$\left\{a_n\right\}$单调减少，知极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，记为$a$, 则$a_n \geq a$且$a \geq 0$.

又$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$发散，根据莱布尼茨级数交错判别法知，必有$a>0$（否则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$收敛）.

又正项级数$\left\{a_n\right\}$单调减少，有$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而$\frac{1}{a+1}<1$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$收敛，根据比较判别法，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$也收敛.

【详解 2】

同方法一，可证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. 令$b_n=\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1,$$

根据根值判别法，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$也收敛.

九、设$y=f\left(x\right)$是区间$\left[0,1\right]$上的任一非负连续函数.

（1）试证存在$x_0\in\left(0,1\right)$, 使得再区间$\left[0,x_0\right]$上以$f\left(x_0\right)$为高的矩形面积，等于再区间$\left[x_0,1\right]$上以$y=f\left(x\right)$为曲边的梯形面积.

（2）又设$f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$内可导，且$f^{'}\left(x\right)>-\frac{2f\left(x\right)}{x}$，证明（1）中的$x_0$试唯一的.

【详解】 （1）令$\varphi\left(x\right)=-x\int_x^1 f\left(t\right)dt$, 则$\varphi\left(x\right)$在闭区间$\left[0,1\right]$上连续，在开区间$\left(0,1\right)$内可导，又$\varphi\left(0\right)=\varphi\left(1\right)=0$. 由罗尔定理知，存在$x_0\in\left(0,1\right)$, 使$\varphi^{'}\left(x_0\right)=0$. 即

$$\varphi^{'}\left(x_0\right)=x_0 f\left(x_0\right)-\int_{x_0}^1 f\left(t\right)dt=0.$$

也即 $$x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(x)dx.$$

（2）令 $F(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)dt,$

则 $$F'(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)=2f(x)-xf'(x)>0,$$

即 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调增加，从而 $F(x)=0$ 的点 $x=x_0$ 必唯一，故（1）中的 x_0 试唯一的.

十、已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4,$ 可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\xi^2=4,$ 求 a,b 的值和正交矩阵 $P.$

【详解】 由题设知，矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 相似，于是有

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，

即 $$\begin{bmatrix} \lambda-1 & -b & -1 \\ -b & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

解得 $a=3,b=1.$

此时，$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4.$

解 $(0E-A)x=0,$ 得属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量为 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$.

解 $(E-A)x=0,$ 得属于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha_2=(1,-1,1)^T$.

解 $(4E-A)x=0,$ 得属于特征值 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $\alpha_1=(1,2,1)^T$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\eta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,\eta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$$

令 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，即为所求得正交矩阵.

十一、设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k, 使线性方程组 $A^k\alpha=0$ 有解向量 α, 且 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明：向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

【详解】 设有常数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}$, 使得

$$\lambda_0\alpha+\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0,$$

则有 $A^{k-1}\left(\lambda_0\alpha+\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha\right)=0,$

从而 $\lambda_0 A^{k-1}\alpha=0.$

由题设 $A^{k-1}x\neq 0$，所以 $\lambda_0=0.$

类似地可证明 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0$, 因此向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

十二、已知线性方程组

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $\left(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n}\right)^T, \left(b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n}\right)^T, \cdots, \left(b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n}\right)^T$, 试写出线性方程组

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1,2n}x_{2n}=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解，并说明理由.

【详解】 (II) 的通解为

$y=c_1\left(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,2n}\right)^T+c_2\left(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,2n}\right)^T+\cdots+c_n\left(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n}\right)^T$， 其 中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数.

理由：方程组（I）、（II）的系数矩阵分别记为 A,B，则由题设可知 $AB^T=O$, 于是 $BA^T=\left(AB^T\right)^T=O$,可见 A 的 n 个行向量的转置为（II）的 n 个解向量.

由于 B 的秩为 n, 故（II）的解空间维数为 $2n-r\left(B\right)=2n-n=n$. 又 A 的秩为 $2n$ 与（I）的解空间维数之差，即为 n, 故 A 的 n 个行向量线性无关，从而它们的转置向量构成（II）的一个基础解系，于是得到（II）的上述通解.

十三、设两个随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，求随机变量 $\left|X-Y\right|$ 的方差.

【详解】 令 $Z=X-Y$，由于 X,Y 相互独立，且都服从正态分布，因此 Z 也服从正态分布，且 $E\left(Z\right)=E\left(X\right)-E\left(Y\right)=0, D\left(Z\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)=1,$

于是

$$Z=X-Y\sim N\left(0,1\right)$$

$$\begin{aligned} D\left|X-Y\right| &= D\left(\left|Z\right|=E\left|Z\right|^2-\left[E\left|Z\right|\right]^2\right)=E\left(Z^2\right)-\left[E\left|Z\right|\right]^2 \\ &= D(Z)+\left[E(Z)\right]^2-\left[E\left|Z\right|\right]^2 \\ &= 1-\left[E\left|Z\right|\right]^2 \end{aligned}$$

而 $E\left|Z\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|z\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

故 $D\left|X-Y\right|=1-\frac{2}{\pi}.$

十四、从正态总体 $N\left(3,4,6^2\right)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间 $\left(1.4,5.4\right)$ 内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？

附表：标准正态分布表

$$\Phi\left(z\right)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi\left(z\right)$	0.900	0.950	0.975	0.990

【详解】 以 $\overline{X}$ 表示该样本均值，则

$$\frac{\overline{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1),$$

从而

$$P\{1.4<\overline{X}<5.4\}=P\{-2<\overline{X}-3.4<2\}=$$

$$P\{|\overline{X}-3.4|<2\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-3.4|}{6}\sqrt{n}<\frac{2\sqrt{n}}{6}\right\}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geq 0.95,$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geq 0.975,$

由此得 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geq 1.96$，即 $n\geq(1.96\times 3)^2\approx 34.57,$

所以 n 至少应取 35.

十五、设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生地成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生得平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附表：t 分布表

$$P\{t(n)\leq t_p(n)\}=p$$

$t_p(n)$ \ P \ n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

【详解】 设该次考试得考生成绩为 X，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\overline{X}$，样本标准差为 S，则本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：

$$H_0:\mu=70, H_1:\mu\neq 70,$$

拒绝域为

$$|t| = \frac{|\overline{X} - 70|}{s}\sqrt{n} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

由 $n = 36, \overline{X} = 66.5, s = 15, t_{0.975}(36-1) = 2.0301,$

算得

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15}\sqrt{36} = 1.4 < 2.0301$$

所以接受假设 $H_0 : \mu = 70$，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.