2001年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、　填空题

(1)设 $y=e^x\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的同解，则该方程为______.

【答】　$y''-2y'+2y=0$.

【详解】　方法一　看出所给解对应的特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，从而特征方程为 $\left(\lambda-(1+i)\right)$,

$\left(\lambda-(1-i)\right)=\lambda^2-2\lambda+2=0$, 于是所求方程为 $y''-2y'+2y=0$.

方法二　将已知解代入 $y''+by'+cy=0$，得

$e^x\sin x\cdot\left(b\left(c_1-c_2\right)+cc_1-2c_2\right)+e^x\cos x\cdot\left(b\left(c_1+c_2\right)+cc_2+2c_1\right)$.由于 $e^x\sin x$ 与 $e^x\cos x$ 线性无关，故 $b\left(c_1-c_2\right)+cc_1=2c_2, b\left(c_1+c_2\right)+cc_2=-2c_1$，解得 $b=-2, c=2$

显然解法2较解法1麻烦.

方法三、由通解 $y=e^x\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$，求得

$$y'=e^x\left(\left(c_1-c_2\right)\sin x+\left(c_1+c_2\right)\cos x\right)$$
$$y''=e^x\left(-2c_2\sin x+2c_1\cos x\right)$$

从这三个式子消去 c_1 与 c_2，得 $y''-2y'+2y=0$

（2）设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $div\left(gradr\right)\big|_{(1,-2,2)}=$_____.

【答】　$\dfrac{2}{3}$.

【详解】　根据定义有

$$gradr=\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{\partial r}{\partial z}k=\frac{x}{r}i+\frac{y}{r}j+\frac{z}{r}k$$

$$div\left(gradr\right)=\frac{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{r}\right)}{\partial z}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

于是　$$div\left(gradr\right)\big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

(3)交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f\left(x,y\right)dx=$______.

【答】 $\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$.

【详解】 因为

$$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx,$$

积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 0, 1-y\le x\le 2\}$,

又可将 D 改写为

$$D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2, 1-x\le y\le 2\},$$

于是有

$$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx=-\int_1^2 dx\int_{-x}^0 f(x,y)dy$$
$$=\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

(4)设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$,其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$_____.

【答】 $\frac{1}{2}(A+2E)$.

【答】 由题设，$A^2+A-4E=O$，

有 $A^2+A-2E=2E$，

$$(A-E)(A+2E)=2E,$$

也即 $(A-E)\cdot\frac{1}{2}(A+2E)=E,$

故 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$

（5）设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\ge 2\}\le$_____.

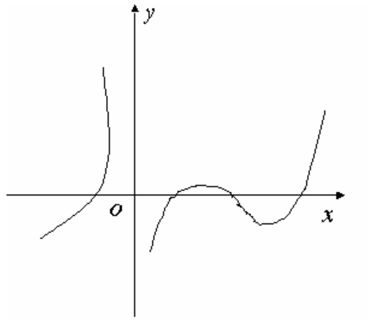
【答】 $\frac{1}{2}$.

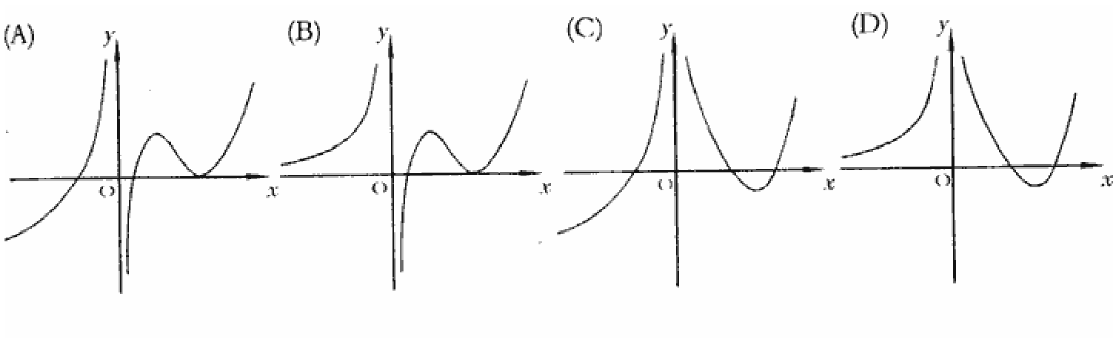
【详解】 根据切比雪夫不等式有

$$P\{|X-E(X)|\ge 2\}\le\frac{D(X)}{2^2}=\frac{1}{2}$$

二、选择题

（1）设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如右图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为





【 】

【答】应选（D）

【详解】 从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$ 对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除（A），（C）；

又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧有三个零点，因此由罗尔中值定理知，其导函数 $y=f'(x)$ 图形在 y 轴一定有两个零点，进一步可排除（B）.

故正确答案为（D）.

（2）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$，则

（A） $dz|_{(0,0)}=3dx+dy.$

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 题设只知道一点的偏导数存在，但不一定可微，因此可立即排除（A）；

至于（B），（C），(D)则需要通过具体的计算才能进行区分，

令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则有

$F'_x=-f'_x, F'_y=-f'_y, F'_z=1$

因此过点$\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$的法向量为$\pm\left\{-3,-1,1\right\}$，可排除（B）；

曲线点$\begin{cases} z=f\left(x,y\right) \\ y=0 \end{cases}$可表示为参数形式：$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f\left(x,0\right) \end{cases}$，其中点$\left(0,0,f\left(0,0\right)\right)$的切向量为

$\pm\left\{1,0,f'_x\left(0,0\right)\right\}=\pm\left\{1,0,3\right\}$

故正确选项为（C）.

（3）设 $f\left(0\right)=0$，则 $f\left(x\right)$在点 $x=0$ 可导的充要条件为

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f\left(1-\cos h\right)$存在.

（B）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$存在.

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f\left(h-\sin h\right)$存在.

（D）$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f\left(2\mathrm{h}\right)-f\left(h\right)\right]$存在

【 】

【答】 应选（B）.

【详解】 因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)\underset{}{\overset{1-e^h=x}{=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}\cdot\frac{x}{\ln\left(1-x\right)}$$

可见，若 $f\left(x\right)$在点 $x=0$ 可导，则极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$一定存在；反过来，若$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$存在，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}\overset{x=1-e^h}{=\!=\!=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1-e^h\right)}{h}\cdot\frac{h}{1-e^h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1-e^h\right)}{h}$$

存在，即 $f\left(x\right)$在点 $x=0$ 可导，因此正确选项为（B）.

至于（A），（C）,(D)均为必要而非充分条件，可举反例说明不成立.比如，$f\left(x\right)=\left|x\right|$,在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f\left(1-\cos h\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left|1-\cos h\right|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f\left(h-\sin h\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left|h-\sin h\right|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left|\frac{1-\sin h}{h^3}\right|\cdot\left|h\right|=0$$

均存在，可排除（A）、（C）.

又如 $f\left(x\right)=\begin{cases} 1, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f\left(2\mathrm{h}\right)-f\left(h\right)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

存在，进一步可排除（D）.

（4）设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B

（A）合同且相似　　　　（B）合同但不相似

（C）不合同但相似　　　　（D）不合同且不相似

【 】

【答】　应选(A)

【详解】　因为

A 是实对称矩阵，且其特征值为：$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,$ 故存在正交矩阵 $Q,$ 使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可见，则 A 与 B 既合同又相似.

(5)将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

（A）-1　　　（B）0　　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　　（D）1

【 】

【答】　应选（A）

【详解】　设 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则有 $Y=n-X$，因此 X 和 Y 的相关系数为 $r=-1$

三、求 $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$

【详解】

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx&=\frac{1}{2}\int\arctan e^x d\left(e^{-2x}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{de^x}{e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x\right)+C\end{aligned}$$

四、设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处可微，且

$$f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f\left(x,f(x,x)\right).$$

求$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$

【详解】 由题设，有 $\varphi(1)=f\left(1,f(1,1)\right)=f(1,1)=1,$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}&=\left[3\varphi^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]\Big|_{x=1}\\&=3\varphi^2(x)\left[f'_x\left(x,f(x,x)\right)+f'_y\left(x,f(x,x)\right)\left(f'_x(x,x)+f'_y(x,x)\right)\right]\Big|_{x=1}\\&=3\cdot1\cdot\left[2+3(2+3)\right]=51\end{aligned}$$

五、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq0\\ 1, x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$展开成 x 的幂级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

【详解】 因$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, x\in(-1,1)$

故 $\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in[-1,1]$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}x^{2n}, x\in[-1,1]\end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}\left[f(1)-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

六、计算$I=\oint_L\left(y^2-z^2\right)dx+\left(2z^2-x^2\right)dy+\left(3x^2-y^2\right)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

【详解 1】记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影.由斯托克斯公式得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S (-2y-4z)dydz + (-2z-6x)dzdx + (-2x-6y)dxdy \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)dS \\
&= -2\iint_D (x-y+6)dxdy \\
&= -12\iint_D dxdy \\
&= -24.
\end{aligned}
$$

【详解 2】转换投影法.用斯托克斯公式，取平面 $x+y+z=2$ 被 L 所围成的部分为 S，按斯托克斯公式的规定，它的方向向上，S 在 xOy 平面上的投影域记为 $D, D=\{(x,y) \mid |x|+|y|\le 1\}$. S 为 $z=2-x-y, \dfrac{\partial z}{\partial x}=-1, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-1,$ 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L (y^2-z^2)dx + (2z^2-x^2)dy + (3x^2-y^2)dz \\
&= \iint_S (-2y-4z)dydz + (-2z-6x)dzdx + (-2x-6y)dxdy \\
&= \iint_S \{-2y-4z, -2z-6x, -2x-2y\}\cdot\left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\}dxdy \\
&= -2\iint_S (4x+2y+3z)dxdy = -2\iint_D (x-y+6)dxdy \\
&= -12\iint_D dxdy = -24
\end{aligned}
$$

其中 $\iint_D (x-y)dxdy = \iint_D xdxdy = -\iint_D ydxdy = 0-0=0$，用得性质：$x$ 为 x 得奇函数，D 对称于 y 轴；y 为 y 的奇函数，D 对称于 x 轴；积分均应为零.

【详解 3】

降维法，取 S 如解法 1 中定义，代入 I 中，

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{L_1} \left(y^2-(2-x-y)^2\right)dx + \left(2\left((2-x-y)^2-x^2\right)\right)dy + (3x^2-y^2)(-dx-dy) \\
&= \oint_{L_1} \left(y^2-4x^2-4xy+4x+4y-4\right)dx + \left(3y^2-2x^2+8xy-8x-8y+8\right)dy \\
&\underline{\underline{\text{格林公式}}} -2\iint_D (x-y+6)dxdy = -24
\end{aligned}
$$

其中，L_1 为 L 在 xOy 平面上投影，逆时针.

【详解 4】

逐个投影法，由斯托克斯公式

$$
I_1 = \iint_S (-2y-4z)dydz - 2\iint_D (y+2z)dydz,
$$

其中 $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,|2-y-z|+|y|\le 1\}$, 分别令 $y\ge 0, y\le 0, 2-y-z\ge 0, 2-y-z\le 0,$ 可得到 D_{yz} 的 4 条边的方程：

右：$2y+z=3$；上：$z=3$；左：$2y+z=1$；下：$z=1$.

于是 $I_1=-2\int_1^3 dz\int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)}(y+2z)dy=-16$

类似地，$I_2=-2\iint\limits_S(2+3x)dzdx=-8$

$I_3=-2\iint\limits_S(x+y)dxdy=0$ （由奇、偶数及对称性）

$I=I_1+I_2+I_3=-24$

【详解 5】

参数法. $L:|x|+|y|=1, z=2-x-y$

当 $x\ge 0$ ，$y\ge 0$ 时，$L_1: y=1-x, z=2-x-y, x$ 从 1 到 0.

$$\int_{L_1}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$
$$=\int_1^0\left[(1-x)^2-1+(2-x^2)(-1)\right]$$
$$=\frac{7}{3}.$$

当 $x\le 0, y\ge 0, L_2: y=1+x, z=1-2x, x$ 从 0 到-1

$$\int_{L_2}=\int_0^{-1}(2x+4)=-3$$

当 $x\le 0, y\le 0, L_3: y=1-x, z=3, x$ 从－1 到 0

$$\int_{L_3}=\int_{-1}^0(2x^2+2x-26)dx=-\frac{79}{3}$$

当 $x\ge 0, y\le 0, L_4: y=x-1, z=3-2x, x$ 从 0 到 1

$$\int_{L_4}=\int_0^1(-18x+12)dx=3.$$

$$I=\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}=-24$$

七、设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\ne 0$, 试证：

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任意 $x\ne 0$, 存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$ 成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

【详解 1】

（1）任给非零 $x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x](0<\theta(x)<1)$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0$，

则 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调且增加，故唯一.

（2）对于非零 $x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x](0<\theta(x)<1)$$

于是有

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$$

上式两边取极限，得

$$左端＝\lim_{x\to 0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=f''(0)\lim_{x\to 0}\theta(x)$$

$$右端＝\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

【详解 2】

（1） 同【详解 1】.

（2） 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\varepsilon 在 0 与 x 之间$$

所以

$$xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2，$$

从而

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=\frac{1}{2}f''(\xi),$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=\lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

【详解 3】

（1） 同【详解 1】.

（2） 因 $f''(x)\neq 0$, 故 $f'(x)$ 存在单值连续可导的反函数，记为 $\varphi(x)$, 则有

$$\theta(x)\cdot x=\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right],$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\varphi'\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]\cdot\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$

$$=\varphi'\left[f'(0)\right]\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\varphi'\left[f'(0)\right]f'(0)$$

但因 $\varphi\left[f'(x)\right]=x$，两边对 x 求导，有

$\varphi'\left[f'(x)\right]f''(x)=1$，以 $x=0$ 代入，

于是有 $$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

【详解 4】

（1） 同【详解 1】.

（2） 由 $f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x$, 将 $f'(\theta(x)x)$ 再展开，有

$$f'(\theta(x)x)=f'(0)+f''(0)\theta(x)x+o(\theta(x)x)$$

代入上式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\theta(x)x^2+o(\theta(x)x)x$$

所以

$$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-o(\theta(x)x)x}{f''(0)x}$$

令 $x\to 0$ 取极限，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f'(0)x}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\lim_{x\to 0}=\frac{o(\theta(x)x)x}{x^2}=0.$$

八、设有一高度为 $h(t)$ (t为时间) 得雪堆再融化过程中，其侧面积满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130 厘米）的雪堆全部融化需多少小时？

【详解】

记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h(t)^2-h(t)z\right]}dxdy$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h(t)^2-h(t)z\right]dz$$

$$=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16\left(x^2+y^2\right)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr$$

$$=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\dfrac{dV}{dt}=-0.9S(t)$，将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入，得 $\dfrac{dh(t)}{dt}=-\dfrac{13}{10}$

解得 $\quad h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$

由 $h(0)=130$，得

$$h(t)=-\frac{13}{10}t+130.$$

令 $h(t)\to 0$ 得 $t=100$（小时）.

因此高度为 130 厘米得雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1,t_2 为实常数.试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

【详解】

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为均为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性组合，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为均为$Ax=0$的解.下面证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关.设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

即 $$\left(t_1k_1+t_2k_s\right)\alpha_1+\left(t_2k_1+t_1k_2\right)\alpha_2+\cdots+\left(t_2k_{s-1}+t_1k_s\right)\alpha_s=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，因此其系数全为零，即

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \quad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix}=t^s{}_1+\left(-1\right)t^s{}_2$$

可见，当$t^s{}_1+\left(-1\right)t^s{}_2\neq 0$，即当$s$为偶数，$t_1\neq\pm t_2$；当$s$为奇数，$t_1\neq t_2$时，上述方程组只有零解$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，因此向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，

从而$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$也为$Ax=0$的一个基础解系.

十、已知 3 阶矩阵A与三维向量x, 使得向量组x,Ax,A^2x线性无关，且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x$$

（1） 记$P=\left(x,Ax,A^2x\right)$,求 2 阶矩阵B, 使$A=PBP^{-1}$;

（2） 计算行列式$\left|A+E\right|$.

【详解】

（1）方法一：

因为

$$\begin{aligned} &Ax=Ax \\ &A\left(Ax\right)=A^2x \\ &A\left(A^2x\right)=A^3x=3Ax-2A^2x \end{aligned},$$

于是综合上述三式有

$$
\begin{aligned}
A\left(x, Ax, A^2x\right) &= \left(Ax, A^2x, A^3x\right) = \left(Ax, A^2x, 3Ax-2A^2x\right) \\
&= \left(x, Ax, A^2x\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

即 $AP = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = PB$

也即 $A = PBP^{-1}$; 其中 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

方法二：

设 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, 则由 $AP = PB$ 得

$$
\left(Ax, A^2x, A^3x\right) = \left(x, Ax, A^2x\right)\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},
$$

上式可写成

$$
Ax = a_1x + b_1Ax + c_1A^2x, \qquad (1)
$$

$$
A^2x = a_2x + b_2Ax + c_2A^2x, \qquad (2)
$$

$$
A^3x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x, \qquad (3)
$$

将 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 代入（3）式得

$$
3Ax - 2A^2x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x \qquad （4）
$$

由于 x, Ax, A^2x 线性无关，故

由（1）式可得 $a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1;$

由（2）式可得 $a_2 = b_2 = 0, c_1 = 1;$

由（4）式可得 $a_3 = 0, b_3 = 0, c_3 = -2;$

故

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

方法三：

将 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 改写成

$A\left(A^2x-Ax\right)=-3\left(A^2x-Ax\right)$

故 $\lambda_1=-3$ 为 A 的特征值，$A2x-Ax$ 为属于-3 的特征向量；

$\lambda_2=1$ 为 A 的特征值，$A2x+3Ax$ 为属于 1 的特征向量；

$\lambda_3=0$ 为 A 的特征值，$A^2x+2Ax-3Ax$ 为属于-3 的特征向量；

令

$$Q=\left(x,Ax,A^2x\right)\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ&=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}B\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

但另一方面，Q 为特征向量组成的矩阵，所以 $Q^{-1}AQ$ 为由对应的特征值组成的对角矩阵：

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以

$$B=\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&3&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

（2）由（1）知，A 与 B 相似，故 $A+E$ 与 $B+E$ 也相似，于是有

$$\left|A+E\right|=\left|B+E\right|=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}=-4$$

十一、设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda\left(\lambda>0\right)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概

率为$P(0<P<1)$，且途中下车与否相互独立，以Y表示在中途下车的人数，求：

（1） 在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率；

（2） 二维随机变量(X,Y)的概率分布.

【详解】

（1） 求在发车时有n个乘客的条件下，中途有m人下车的概率，相当于求条件概率

$P\{Y=m\mid X=n\}$，

而由题设知，此条件概率服从二项分布，

因此有:

$$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n{}^m P^m(1-P)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots$$

（2） 利用乘法公式，得

$$\begin{aligned}P\{X=n\mid Y=m\}&=P\{Y=m\mid X=n\}P\{x=n\}\\&=C_n{}^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n,0\le m\le n,n=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

十二、设总体X服从证态分布$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\ge 2)$其样本均值为$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2$的数学期望$E(Y)$.

【详解】

记$\overline{X_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{X_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$则有$2\overline{X}=\overline{X_1}+\overline{X_2}$

因此

$$\begin{aligned}E(Y)&=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]^2\right\}\\&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2+2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\right\}\\&=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]+0+E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\\&=(n-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2\\&=2(n-1)\sigma^2\end{aligned}$$