1997 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解及评析

一、　填空题

（1）　设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$ 其中 f 可微，则 $dy=$________.

【答】　$e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$

【详解】

$$dy=d\left[f(\ln x)e^{f(x)}\right]=\left[df(\ln x)\right]\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)de^{f(x)}$$

$$=\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)dx\right]\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)dx\right]\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)dx$$

（2）　若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$, 则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

【答】　$\frac{\pi}{4-\pi}$

【详解】　设 $\int_0^1 f(x)dx=A$,

则

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+A\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\arctan x\Big|_0^1+\frac{A}{2}\cdot\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}A$$

故 $A=\frac{\pi}{4-\pi}$.

（3）　差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解为 $y_t=$________.

【答】　$C+(t-2)2^t$

【详解】　齐次差分方程 $y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $C.C$ 为任意常数

设 $(at+b)2^t$ 是差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的一个特解，则 $a=1,b=-2.$ 因此

$y_t=C+(t-2)2^t$ 为所求通解.

(4) 若二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是_______.

【答】 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

【详解】 f 正定的充分必要条件是 f 对应矩阵的各阶顺序主子式大于零，因此

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix}>0,$$

解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N\left(0,3^2\right)$，而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别式来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从__________分布，参数为_____________.

【答】 $t,9$

【详解】 令 $X_i'=\dfrac{X_i}{3},Y_i'=\dfrac{Y_i}{3},i=1,2,\cdots,9$

则 $X_i'\sim N\left(0,1\right),Y_i'\sim N\left(0,1\right),i=1,2,\cdots,9$

$X'=X_1'+\cdots+X_9'\sim N\left(0,3^2\right),$

$Y'=Y_1'+\cdots+Y_9'\sim \mathrm{X}^2\left(9\right)$

因此

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\frac{X_1'+\cdots+X_9'}{\sqrt{Y_1'^2+\cdots+Y_9'^2}}=\frac{X'}{Y'}=\frac{\frac{X'}{3}}{\sqrt{\frac{Y'}{9}}}$$

由于

$$\frac{X'}{3}\sim N\left(0,1\right),Y'\sim \mathrm{X}^2\left(9\right)$$

故 $U\sim t\left(9\right)$.

二、选择题

（1）　设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2dt, g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$, 则当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 低阶无穷小　　　　(B) 高阶无穷小

(C) 等阶无穷小　　　　(D) 同阶但不等价的无穷小

【 】

【答】　　应选 (B)

【详解】 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin(1-\cos)^2}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos)^2}{x^3+x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}}{x^3+x^4}=0.$$

（2）　若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0,$ 且 $f''(x)<0,$ 则在 $(0,+\infty)$ 内有

$(A)\ f'(x)>0, f''(x)<0$　　　　$(B)\ f'(x)>0, f''(x)>0$

$(C)\ f'(x)<0, f''(x)>0$　　　　$(D)\ f'(x)<0, f''(x)>0$

【 】

【答】　　应选 (C)

【详解】　由 $f(-x)=f(x)$,得

$$-f'(x)=f'(x), f''(-x)=f'(x)$$

可见当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-x\in(-\infty,0)$，且

$$f'(x)=-f'(-x)<0, f''(x)=f'(-x)<0$$

所以应选 (C).

（2）　设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是

$(A)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

$(B)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

$(C)\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

$(D)\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3, 3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

【 】

【答】 应选(C)

【详解】

$$(A):(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$$
$$(B):(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=0$$

可见(A)、(B)中向量组线性相关，(C)、(D)不能直接观察出，对于(C)，令

$$k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+k_3(3\alpha_3+\alpha_1)=0$$

即

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(2k_1+2k_2)\alpha_2+(3k_2+3k_3)\alpha_3=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ 2k_1+2k_2=0 \\ 3k_2+3k_3=0 \end{cases}$$

因上述齐次线性方程组的系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=12\neq 0,$，故方程组由惟一零解，即

$k_1=k_2=k_3=0$，故(C)中向量组线性无关，应选(C).

（4） 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶可逆矩阵，则

$(A)\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(C)存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$

(D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

【 】

【答】 应选(D).

【详解】 由题设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可逆，若取$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1},$则$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{BAA}^{-1}=\boldsymbol{B},$即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，可见$(D)$.成立

矩阵乘法不满足交换律，故(A)不成立；任意两个同阶可逆矩阵，不一定是相似的或合同的，因此(B)、(C)均不成立.

（5） 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$, $P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$,则下列各式中成立的是

$(A) P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$ $(B) P\{X=Y\}=1$

$(C) P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$ $(D) P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

【 】

【答】 应选(A).

【详解】

$$P\{X=Y\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

而

$$P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2},P\{XY=1\}=\frac{1}{4}.$$

三、在经济学中，称函数$Q(x)=A\left[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right]^{-\frac{1}{x}}$为固定替代弹性生产函数，而称函数$\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-x}\delta$为 Cobb－Douglas 生产函数（简称 C-D 生产函数）

试证明：当 $x\to 0$ 时，固定替代弹性生产函数变为 C-D 同阶生产函数，即有

$$\lim_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$$

【详解】 $\ln Q(x)=\ln A-\frac{1}{x}\ln\left[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right]$

而且

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{\ln\left[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$$

$$=-\delta\ln K-(1-\delta)\ln L=-\ln\left(AK^{\delta}L^{1-\delta}\right)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\ln Q(x)=\ln A+\ln\left(K^{\delta}L^{1-\delta}\right)=\ln\left(AK^{\delta}L^{1-\delta}\right)$$

于是

$$\lim_{x\to 0}Q(x)=AK^{\delta}L^{1-\delta}=\overline{Q}.$$

四、设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别是由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^{x}-xz=0$ 所确定，求 $\frac{du}{dx}$.

【详解】 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx},\qquad (*)$

由 $e^{xy}-y=0$ 得 $e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=\frac{y^2}{1-xy}$$

由 $e^{x}-xz=0$，得 $e^{z}\frac{dz}{dx}-z-x\frac{dz}{dx}=0$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{e^{z}-x}=\frac{z}{xz-z}$$

代入 $(*)$ 式得

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^2}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xz-x}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

五、一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$（万元/吨），x 为销售量（单位：吨），商品的成本函数是 $C=3x+1$（万元）

（1） 若每销售一吨商品，政府要征税 t（万元），求该商家获最大利润时的销售量;

（2） t 为何值时，政府税收总额最大.

【详解】 （1） 设 T 为总税额，则 $T=tx$；商品销售总收入为

$$R=px=(7-0.2x)x=7x-0.2x^2,$$

利润函数为

$$\pi=R-C-T=7x-0.2x^2-3x-1-tx=-0.2x^2+(4-t)x-1.$$

令 $\frac{d\pi}{dx}=0,$ 即 $-0.4x+4-t=0,$

由于 $\frac{d^2\pi}{dx^2}=-0.4x<0,$ 因此 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 即为最大利润时的销售量.

（3） 将 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T=tx$，得

$$T=t\cdot\frac{5(4-t)}{2}=10t-\frac{5}{2}t^2$$

由 $\frac{dT}{dt}=10-5t=0$ 得惟一驻点 $t=2$

由于 $\frac{d^2T}{dt^2}=-5<0$, 可见当 $t=2$ 时 T 有极大值，此时政府税收总额最大.

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(x)\geq 0$. 试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)dt, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减（其中 $n>0$）

【详解 1】 显然当 $x>0$ 时 $F(x)$ 连续，又

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x t^n f(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^n f(x)=0=F(0)$$

故 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续

对于 $x\in(0,+\infty)$ 有

$$F'(x)=\frac{x^{n+1}f(x)-\int_0^x t^n f(t)dt}{x^2}=\frac{x^{n+1}f(x)-\xi^n f(\xi)x}{x^2}$$

$$=\frac{x^{n+1}f(x)-\xi^n f(\xi)}{x}=\frac{x^n\left[f(x)-f(\xi)\right]+f(\xi)\left(x^n-\xi^n\right)}{x},$$

其中 $0<\xi<x$.

因此，由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减知 $f(x)\geq f(\xi)$，又 $x^n>\xi^n$，于是 $F'(x)\geq 0$ 故

$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减.

【详解 2】 连续性的证明同上，由于

$$F'(x)=\frac{x^{n+1}f(x)-\int_0^x t^n f(t)dt}{x^2}=\frac{\int_0^x x^n f(x)dx-\int_0^x t^n f(t)dt}{x^2}$$

$$=\frac{\int_0^x\left[x^n f(x)-t^n f(t)\right]dt}{x^2}\geq 0.$$

可见 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减.

七、从点 $P_1(1,0)$ 做 x 轴垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$；再从 Q_1 做抛物线的切线与 x 轴交于 P_2，然后又从 P_2 做 x 的垂线，交抛物线于点 Q_2,依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots P_n,Q_n\cdots$.

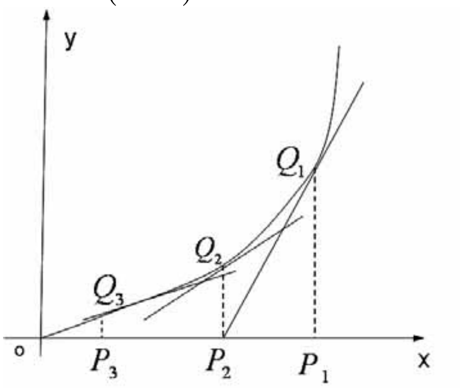
（1）求 $\overline{OP_n}$;

（2）求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$ 的和。

其中 $n(n\geq 1)$ 为自然数，而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离.

【详解】 （1）由 $y=x^2$，得 $y'=2x$ 对于任意 $a(0<a\leq 1)$,抛物线 $y=x^2$ 在点 (a,a^2) 处的切线方程为

$y-a^2=2a(x-a)$



且该切线与 x 轴的交点为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$,故由 $\overline{OP_1}=1$, 可见

$$\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}=\frac{1}{2},$$
$$\overline{OP_3}=\frac{1}{2}\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\overline{OP_n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

（2）由于 $\overline{Q_nP_n}=\left(\overline{OP_n}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$,

可见 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}.$

八、设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(t)$.

【详解】 显然 $f(0)=1,$ 由于

$$\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}r\right)rdr=2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr$$

可见

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr$$

两边求导得

$$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$$

解上述关于 $f(t)$ 的一阶线性非齐次微分方程，得

$$f(t)=\left(\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi tdt}dt+C\right)e^{\int 8\pi tdt}=\left(8\pi\int tdt+C\right)e^{4\pi t^2}=\left(4\pi t^2+C\right)e^{4\pi t^2},$$

代入 $f(0)=1,$ 得 $C=1.$

因此 $f(t)=\left(4\pi t^2+1\right)e^{4\pi t^2}.$

九、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\alpha^T\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \alpha\\ \alpha^T & b\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵

a) 计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$;

b) 证明：矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T\boldsymbol{A}^{-1}\alpha^T\neq b.$

【详解】 （1）因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$ 故

$$\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\alpha^T\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \alpha\\ \alpha^T & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \alpha\\ -\alpha^T\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{A}|\alpha^T & -\alpha^T\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}+b|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \alpha\\ 0 & |\boldsymbol{A}|\left(b-\alpha^T\boldsymbol{A}^{-1}\alpha\right)\end{pmatrix}.$$

（2） 由（1）可得

$$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{A}|^2\left(b-\alpha^T\boldsymbol{A}^{-1}\alpha\right),$$

而$|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{Q}|$, 且$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\neq 0,$

故$|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}|\left(b-\alpha^T\boldsymbol{A}^{-1}\alpha\right)$

由此可知$|\boldsymbol{Q}|\neq 0$的充分必要条件为$\alpha^T\boldsymbol{A}^{-1}\alpha\neq b,$ 即矩阵$\boldsymbol{Q}$可逆的充分必要条件是

$\alpha^T\boldsymbol{A}^{-1}\alpha^T\neq b.$

十、 设三阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是$1,2,3;$ 矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值$1,2$的特征向量分别是

$\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T.$

（1） 求$\boldsymbol{A}$的属于特征值 3 的特征向量；

（2） 求矩阵$\boldsymbol{A}$.

【详解】 （1）设$\boldsymbol{A}$的属于特征值 3 的特征向量为

$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T.$

因为对于实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量相互正交，所以

$\alpha_1^T\alpha_3=0$和$\alpha_2^T\alpha_3=0,$

即(x_1,x_2,x_3)是齐次线性方程组

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

的非零解，解上面方程组，得其基础解系为$(1,0,1)^T.$

因此$\boldsymbol{A}$的属于特征值 3 的特征向量为$\alpha_3=k(1,0,1)^T$（k 为任意非零常数）.

c) 令矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由于

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

可见

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{bmatrix}.$$

十一、 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8},P\{X=1\}=\frac{1}{4}$; 在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比，试求 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leq x\}$.

【详解】 由条件可知，当 $x<-1$ 时，$F(x)=0;F(-1)=\frac{1}{8}$,

$$P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8},$$

易见，在 X 的值属于 $(-1,1)$ 的条件，事件 $\{-1<X\leq x\}$ $(-1<x<1)$ 的条件概率为

$$P\{-1<X\leq x\mid -1<X<1\}=\frac{x+1}{2},$$

于是对于 $-1<x<1$, 有

$$P\{-1<X\leq x\}=P\{-1<X\leq x,-1<X<1\}$$

$$=P\{-1<X<1\}P\{-1<X\leq x\mid -1<X<1\}$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16},$$

对于 $x\geq 1$, 有 $F(x)=1$.

从而

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

十二、 游客乘电梯从底层到电视塔层观光；电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行，假设一游客在早晨八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在$[0,60]$上服从均匀分布，求该游客等候时间的数学期望.

【详解】 已知 X 在$[0,60]$上服从均匀分布，其密度为

$$X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 Y 是游客等候电梯的时间（单位：分），则

$$Y=g(x)=\begin{cases}5-X, & 0<X\le 5,\\ 25-X, & 5<X\le 25,\\ 55-X, & 25<X\le 55,\\ 65-X, & 55<X\le 60.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}E(Y)&=E\left[g(X)\right]\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)dx\\ &=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)dx+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\right]\\ &=11.67.\end{aligned}$$

十三、 两台同样自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自行开动.

试求两台记录仪无故障工作的总时间T的概率密度$f(t)$、数学期望和方差.

【详解】 以X_1和X_2表示先后开动的记录仪无故障工作的时间，则$T=X_1+X_2$，由条件概率知$X_i(i=1,2)$的概率密度为

$$p_i(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

两台仪器无故障工作时间X_1和X_2显然相互独立.

利用二独立随机变量和密度公式求T的概率密度,对于$t>0$,有

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)\,p_2(t-x)\,dx=25\int_0^t e^{-5x}e^{-5x(t-x)}dx=25e^{-5t}\int_0^t dx=25te^{-5t}.$$

当$t\le 0$时，显然$f(t)=0$于是，得

$$f(t)=\begin{cases}25te^{-5t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

由于X_i服从参数为$\lambda=5$的指数分布，知

$$E(X_i)=\frac{1}{5};D(X_i)=\frac{1}{25}(i=1,2),$$

因此，有

$$E(T)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{2}{5}.$$

由于X_1和X_2相互独立，可见

$$D(T)=D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=\frac{2}{25}.$$