

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

[非教育部考试中心官方标准试题，仅供参考]

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$ ()

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr =$ ()

(A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$

(B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$

(C) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$

(D) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$

(4) 已知级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \sqrt{i} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛， $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 范围为 ()

(A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

(C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任

意常数, 则下列向量组线性相关的是 ()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$
(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$,

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布 ()

- (A) $N(0, 1)$ (B) $t(1)$ (C) $\chi^2(1)$ (D) $F(1, 1)$

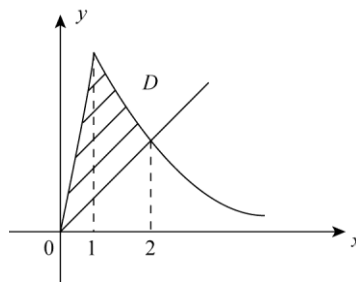
二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$ _____.

(10) 设函数 $f(x) \begin{cases} \ln \sqrt{x}, x \geq 1 \\ 2x-1, x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ _____.

(11) 函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $\left. dz \right|_{(0,1)} =$ _____.

(12) 由曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中所围图形的面积为 _____.



(13) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则

$P(ABC) =$ _____.

一、解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 为由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 所围区域.

(17) (本题满分 10 分) 某企业为生产甲、乙两种型号的产品, 投入的固定成本为 10000 (万元), 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且固定两种产品的边际成

本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件)。

- 1) 求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元)
- 2) 当总产量为 50 件时, 甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小? 求最小的成本.
- 3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本, 并解释其经济意义.

(18) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1.$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及

$$f'(x) + f(x) = 2e^x$$

- 1) 求表达式 $f(x)$
- 2) 求曲线的拐点 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \text{ 二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x \text{ 的秩为 } 2,$$

- (1) 求实数 a 的值;
- (2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准型.

(22) (本题满分 11 分)

已知随机变量 X, Y 以及 XY 的分布律如下表所示:

X	0	1	2
---	---	---	---

P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
---	---------------	---------------	---------------

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

求 (1) $P(X=2Y)$;

(2) $\text{cov}(X-Y, Y)$ 与 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布,

$V = \min(X, Y), U = \max(X, Y)$.

求 (1) 随机变量 V 的概率密度;

(2) $E(U+V)$.